ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

***

CONCOURS D'ADMISSION 1987

*
**

MATHÉMATIQUES
2ème ÉPREUVE
OPTION P'

(Durée de l'épreuve 4 heures)

Le problème propose la détermination, dans sa troisième partie, des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions. L'étude faite, dans la deuxième partie, des comportements à l'infini des solutions d'une équation différentielle permet de distinguer celles des fonctions propres qui sont assez "régulières" à l'infini. La première partie étudie des suites de polynômes et de fonctions utiles dans le cours du problème.

PARTIE - I

Pour tout entier naturel n, on note H_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H_n(t) = e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2}\right).$$

$\mathscr{H}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions f de la forme $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} P(t)$, où P est une fonction polynômiale à coefficients réels.

On rappelle le résultat suivant, dont on ne demande aucune démonstration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

I.1 Pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathscr{H}$, on pose : $(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t)\, dt$.

Justifier cette définition et montrer qu'on obtient ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{H}$.

I.2 Montrer que, pour tout n, H_n est une fonction polynômiale de degré n et calculer le coefficient du terme de degré n.

I.3 Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t).$$

Montrer que, si $n \neq p$, $\left(\varphi_n|\varphi_p\right) = 0$.

Calculer $\gamma_n = \left(\varphi_n|\varphi_n\right)$.

Ainsi, la famille des fonctions $h_n = \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \varphi_n$ est une famille orthonormale dans $\mathscr{H}$.

I.4 Etablir que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on explicitera. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n''(t) - 2t\, H_n'(t) + 2n\, H_n(t) = 0.$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

- 2 -

PARTIE - II

Dans toute cette partie, μ désigne un réel quelconque. On se propose d'étudier les solutions sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, de l'équation différentielle linéaire du second ordre E_μ :

$$x'' - 2t\,x' + 2\mu\,x = 0.$$

II.1 Solutions développables en série entière.

a) Montrer que E_μ admet une solution paire P_μ et une seule, développable en série entière sur $\mathbb{R}$, telle que $P_\mu(0) = 1$ et une solution I_μ impaire et une seule, développable en série entière sur $\mathbb{R}$, telle que $I'_\mu(0) = 1$.

On écrira P_μ et I_μ sous la forme :

$$P_\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_\mu(n)\, t^{2n}$$

$$I_\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_\mu(n)\, t^{2n+1}.$$

b) Montrer que P_μ et I_μ constituent une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de E_μ.

II.2 Solutions polynômiales.

a) Déterminer toutes les valeurs de μ pour lesquelles E_μ admet des solutions polynômiales non nulles ; expliciter alors ces solutions.

b) En déduire les coefficients du polynôme H_n.

c) Montrer que, pour tout nombre réel μ, l'une au moins des fonctions P_μ et I_μ n'est pas polynômiale.

II.3 Comportement asymptotique des solutions non polynômiales.

a) On suppose, par exemple, que P_μ n'est pas polynômiale. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geqslant N$:

$$(n+1) \cdot \frac{a_\mu(n+1)}{a_\mu(n)} \geqslant \frac{3}{4}$$

En déduire que :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left|P_\mu(t)\right| = +\infty.$$

(On notera qu'à partir du rang N, les coefficients $a_\mu(n)$ sont tous du même signe).

Etudier, de même, la limite de $e^{-\frac{t^2}{2}} \left|P_\mu(t)\right|$ lorsque $t \to -\infty$

b) Enoncer et démontrer un résultat analogue pour la fonction I_μ.

c) Déterminer les valeurs de μ pour lesquelles l'équation E_μ admet une solution x non nulle telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t)\right]^2 e^{-t^2} dt$ soit convergente. Déterminer alors toutes ces solutions. Pour celà, on pourra décomposer x dans la base $\left(P_\mu\ ,\ I_\mu\right)$.

d) Etudier, de même, l'existence de solutions x de E_μ telles que $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}} x(t)$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

Tournez la page S. V. P.

PARTIE - III

Soient $C^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$ qui, à tout élément y, associe la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$z(t) = -y''(t) + t^2 y(t).$$

III.1 On se propose de déterminer les fonctions propres de u dont le comportement asymptotique est suffisamment régulier. Plus précisément, soit λ un nombre réel ; on suppose que l'équation $u(y) = \lambda y$ admet une solution y non nulle telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt$ converge. En appliquant convenablement les résultats de la partie II à la fonction $x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} y(t)$, montrer que λ est nécessairement de la forme $2n + 1$ où n est un entier naturel ; exprimer alors toutes les fonctions y qui conviennent, à l'aide de la fonction h_n introduite au I.3.

III.2
a) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathscr{H}$ de $C^\infty(\mathbb{R})$, introduit dans la première partie, est stable par u et que, pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathscr{H}$:

$$\big(u(f)\,|\,g\big) = \big(f\,|\,u(g)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)g(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)g'(t)\,dt.$$

b) Retrouver ainsi, sans calcul, que les fonctions (h_n) sont deux à deux orthogonales dans $\mathscr{H}$.

III.3 Prouver que, pour tout élément b de $\mathscr{H}$, il existe un élément x de $\mathscr{H}$ et un seul tel que $u(x) = b$ et indiquer une méthode permettant d'expliciter x.

***